سری چهارم تمرین‌های ریاضی ۲

۲۱ اسفند ۱۳۹۶

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): منحنی $\gamma(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$ را در نظر بگیرید.

الف) بردارهای B, N, T و انحنای این منحنی را به ازای $t = 0$ حساب کنید؛

ب) طول منحنی را بر فاصله $0 \leq t \leq 3$ حساب کنید.

سوال ۲ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): طول منحنی $\gamma(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ را بر فاصله $0 \leq t \leq 1$ حساب کنید.

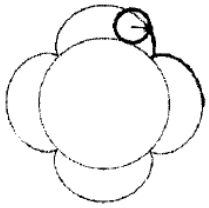
سوال ۳ (نیم‌سال دوم ۸۸-۸۷): منحنی زیر را در صفحه $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید:

$$\gamma(t) = ((1 - \cos t)\cos t, (1 - \cos t)\sin t)$$

الف) طول این منحنی را از صفر تا t بدست آورید که $0 < t < 2\pi$.

ب) انحنای آن را برای $0 < t < 2\pi$ محاسبه نمایید.

سوال ۴ (نیم‌سال دوم ۸۹-۸۸): چرخی به شعاع ۱ روی دایره‌ای به شعاع ۴ می‌چرخد. طول مسیری را که یک نقطه ثابت روی این چرخ طی می‌کند تا دوباره به جای اولش برگردد، پیدا کنید.



سوال ۵ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): منحنی $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ را در نظر بگیرید. از نقطه $(0, -4, -16)$ خطی مماس بر منحنی رسم می‌کنیم. نقطه محل مماس شدن خط بر منحنی را بیابید.

سوال ۶ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): صفحه $x + z = 2$ استوانه $x^2 + y^2 = 5$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله پارامتری خط مماس بر این بیضی را در نقطه $(1, 2, 1)$ بنویسید.

سوال ۷ (نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵): خم $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه $r(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$ در نظر بگیرید. توجه می‌کنیم که تصویر این خم روی استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. نشان دهید در هر نقطه $r(t)$ از این خم، زاویه بین صفحه مماس بر استوانه در آن نقطه و صفحه تولید شده به وسیله بردارهای $N(t)$ و $T(t)$ مقداری ثابت است.

سوال ۸ (نیم‌سال دوم ۸۹-۸۸): فرض کنید ذره‌ای با سرعت ثابت در فضا حرکت می‌کند.

الف) نشان دهید بردار شتاب آن همواره بر بردار سرعتش عمود است.

ب) اگر بردار شتاب این ذره در یک صفحه ثابت قرار داشته باشد و دارای طول ثابت نیز باشد، نشان دهید مسیر حرکت آن یا یک خط است یا یک دایره.

سوال ۹ (نیم‌سال دوم ۸۸-۸۷): تمام منحنی‌های هموار $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ را بدست آورید که بر حسب طول پرمایش (پارامتری) شده، دارای انحنای ثابت $\frac{1}{2}$ باشند، بردار شتاب بر محور z ها عمود باشد، $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ و $\gamma'(0) = (0\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: نشان دهید که منحنی $r(t) = (3t^2 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5)$ مسطح است و سپس معادله صفحه‌ای که منحنی در آن قرار دارد را بیابید.

تمرین ۲: نشان دهید انحنا منحنی با معادله قطبی $r = f(\theta)$ در هر نقطه دلخواه برابر است با:

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{|(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2|^{\frac{3}{2}}}$$

تمرین ۳: انحنا دایره‌ای که از سه نقطه $A = (1, 0, 1)$، $B = (0, 1, 0)$ و $C = (1, 1, 0)$ می‌گذرد را بدست آورید.

تمرین ۴: از تلاقی دو رویه $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (در مختصات کروی) و رویه $r^2 = 2 - z$ (در مختصات استوانه‌ای) یک منحنی به‌دست می‌آید. انحنا و تاب این منحنی را در یک نقطه دلخواه به‌دست آورید.

تمرین ۵: فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم هموار باشد.

الف) ثابت کنید بردار شتاب γ در لحظه t، در صفحه تولید شده به وسیله $N(t)$ و $T(t)$ قرار دارد؛

ب) نشان دهید بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر بر حسب بردارهای $N(t)$ و $T(t)$ تجزیه کرد:

$$\overrightarrow{a}(t) = [\frac{d}{dt}|V|]\overrightarrow{T} + [\frac{|V|^2}{\rho}]\overrightarrow{N}$$